BWZ Nachhilfe

Sicher durch die Prüfung!

Formelsammlung für **FIWI II**

1 Statistische Grundlagen

Statistische Momente

Erwartungswert	a)	$E(r) = \sum_{s=1}^{n} r_s \cdot p_s = \mu$
Varianz	b)	$Var(r) = E((r-\mu)^2) = E(r^2) - E(r)^2 = \sigma_r^2$ $= \sum_{s=1}^{n} p_s \cdot (r_s - \mu)^2 = \sum_{s=1}^{n} p_s \cdot r_s^2 - \mu^2$
Standardabweichung	c)	$\sigma_r = \sqrt{Var(r)}$
Kovarianz	d)	$Cov(r_A, r_B) = \sum_{s=1}^{n} p_s \cdot (r_{A,s} - \mu_A) \cdot (r_{B,s} - \mu_B) =$ $\sum_{s=1}^{n} p_s \cdot r_{A,s} \cdot r_{B,s} - \mu_{r_A} \cdot \mu_{r_B}$
Korrelationskoeffizient	e)	$\rho_{r_A, r_B} = \frac{Cov(r_A, r_B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Z sei eine Standard-Normalverteilte Zufallsvariable. Eine Standard-Normalverteilte Zufallsvariable ist dadurch gekennzeichnet, dass sie einen Mittelwert (μ) von 0 und eine Standardabweichung (σ) von 1 hat, notiert als $Z \sim N(0,1)$. Weiters seien zwei weitere Zufallsvariablen $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$ gegeben. Dann gilt:

Darstellung von X als Z	a)	$X = \mu_X + \sigma_X \cdot Z$
Varianz der summierten Werte zweier Zufallsvariablen	b)	$Var(c_X X \pm c_Y Y) = c_X^2 \cdot Var(X) + c_Y^2 \cdot Var(Y)$ $\pm 2 \cdot c_Y \cdot c_X \cdot Cov(X,Y)$
Standardisierung (um z von der Standard-Normalverteilungstabelle abzulesen)	c)	$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
Entstandardisierung	d)	$x = z \cdot \sigma + \mu$
Gegenwahrscheinlichkeit	e)	$W(Z < z) = 1 - W(Z > z) = 1 - W(Z < -z)$
Das p%-Konfidenzintervall der Zufallsvariable X bestimmen	f)	$z = W^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$ $W(\mu_X - z \cdot \sigma_X < X < \mu_X + z \cdot \sigma_X) = p\%$

2 Markowitz Portfolios

Momente eines Portfolios im Zwei-Wertpapiere-Fall

Erwartungswert	a)	$E(r_p) = E(r_A) \cdot x_A + E(r_B) \cdot x_B = \mu_p$
Varianz	b)	$Var(r_p) = x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot Cov(r_A, r_B)$
Portfoliovarianz falls $\rho = -1$	c)	$Var(r_p) = (x_A \cdot \sigma_A - x_B \cdot \sigma_B)^2$
Portfoliovarianz falls $\rho = 1$	d)	$Var(r_p) = (x_A \cdot \sigma_A + x_B \cdot \sigma_B)^2$
Kovarianz des Portfolios mit einem seiner Bestandteile	e)	$Cov(r_A, r_p) = x_A \cdot Var(r_A) + x_B \cdot Cov(r_B, r_A)$ $Cov(r_B, r_p) = x_B \cdot Var(r_B) + x_A \cdot Cov(r_B, r_A)$

Minimumvarianzportfolio (MVP)

Anteile einer Aktie im MVP	a)	$x_A^{MVP} = \frac{\sigma_B^2 - Cov(r_A, r_B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot Cov(r_A, r_B)}$ $x_B^{MVP} = 1 - x_A^{MVP} = \frac{\sigma_A^2 - Cov(r_A, r_B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot Cov(r_A, r_B)}$
falls $\sigma_A = \sigma_B$	b)	$x_A^{MVP} = x_B^{MVP} = \frac{1}{2}$
falls $\rho = -1$	c)	$x_A^{MVP} = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$
falls $\rho = 1$	d)	$x_A^{MVP} = \frac{\sigma_A}{\sigma_A - \sigma_B}$

Anteile einer Aktie in einem beliebigen Portfolio

Anteile einer Aktie im Portfolio bei gegebener Portfoliorendite $E(r_p)$	a)	$x_{A,p} = \frac{E(r_p) - E(r_B)}{E(r_A) - E(r_B)}$ $x_{B,p} = 1 - x_{A,p}$
Anteile einer Aktie im Portfolio bei gegebener Portfoliovarianz $\sigma_p{}^2$ Aus Portfolio 1 und 2 ist das Effiziente zu wählen (d.h. der mit der höchsten Erwartungsrendite)	b)	$a = \frac{2 \cdot (Cov(r_A, r_B) - \sigma_B^2)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot Cov(r_A, r_B)}$ $b = \frac{\sigma_B^2 + \sigma_p^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot Cov(r_A, r_B)}$ $x_{A,1} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ $\qquad x_{B,1} = 1 - x_{A,1}$ $x_{A,2} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ $\qquad x_{B,2} = 1 - x_{A,2}$

3 Tobin Portfolios

Anteil des risikolosen Titels in einem Portfolio

Anteile einer Aktie im Tangentialportfolio (risikoloser Zinssatz wird als r_f bezeichnet)

RP_A = Risikoprämie von Aktie A
RP_B = Risikoprämie von Aktie B

$$RP_A = E(r_A) - r_f, \qquad RP_B = E(r_B) - r_f$$

Tangentialportfolio
= Tobinportfolio
= Marktportfolio

$$x_{A,M} = \frac{\sigma_B^2 \cdot RP_A - Cov(r_A, r_B) \cdot RP_B}{\sigma_B^2 \cdot RP_A - Cov(r_A, r_B) \cdot RP_B + \sigma_A^2 \cdot RP_B - Cov(r_A, r_B) \cdot RP_A}$$

$$x_{B,M} = 1 - x_{A,M}$$

Tobingerade (Capital Market Line, CML)

Tobingeradengleichung (Erwartungsrendite bei gegebenem Risiko)	a)	$E(r_P) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_P$
Sharpe Ratio des Tobinportfolios bzw. Steigung der Tobingerade	b)	$SR = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$
Tobingeradengleichung (Risiko bei gegebener Erwartungsrendite)	c)	$\sigma_P = \frac{E(r_P) - r_f}{E(r_M) - r_f} \cdot \sigma_M$

Anteil des risikolosen Titels in einem Portfolio

Anteil von r_f bei gegebener Erwartungsrendite des Portfolios	a)	$x_{r_f} = \frac{E(r_P) - E(r_M)}{r_f - E(r_M)}$
Anteil von r_f bei gegebener Risiko des Portfolios	b)	$x_{r_f} = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M}$
Anteile der Aktien im Portfolio	c)	$x_{A,P} = (1 - x_{r_f}) \cdot x_{A,M}$ $x_{B,P} = (1 - x_{r_f}) \cdot x_{B,M}$

4 Capital Asset Pricing Model

Beta und die Gleichgewichtsrendite

Erwartungsrendite (Gleichgewichtsrendite, Security Market Line (SML))	a)	$E(r_j) = r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \frac{\rho_{r_j,r_M} \cdot \sigma_{r_j}}{\sigma_{r_M}} =$ $= r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \frac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma^2_{r_M}} =$ $= r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_j$
Systematisches Risiko des j-ten Titels	b)	$= \rho_{r_j,r_M} \cdot \sigma_j$
Normiertes Systematisches Risiko des j-ten Titels (Beta)	c)	$\beta_j = \frac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma^2_{r_M}} = \frac{\rho_{r_j,r_M} \cdot \sigma_{r_j}}{\sigma_{r_M}}$
Beta des Kapitalmarktes	d)	$\beta_M = \sum_{j=1}^{n} x_j^M \cdot \beta_j = 1$
Risiko des Kapitalmarktes	e)	$\sigma_M = \sum_{j=1}^{n} x_j^M \cdot Cov(r_j, r_M)$

Konsequenzen für die Bewertung

Marktwert (Gleichgewichtspreis) eines zukünftigen, unsicheren Cashflows P_1	a)	Sicherheitsäquivalentenansatz: $P_0 = \dfrac{E(P_1) - \dfrac{E(r_M) - r_f}{\sigma^2_{r_M}} \cdot Cov(P_1, r_M)}{1+r}$
	b)	Diskontierungsansatz: $P_0 = \dfrac{E(P_1)}{1 + r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_j}$
Sicherheitsäquivalent	c)	$CE(E(P_1)) = E(P_1) - \dfrac{E(r_M) - r_f}{\sigma^2_{r_M}} \cdot Cov(P_1, r_M)$
Risikoabschlag	d)	$RA(P_1) = \dfrac{E(r_M) - r_f}{\sigma^2_{r_M}} \cdot Cov(P_1, r_M)$
Kovarianzrisiko	e)	$Cov(P_1, r_M) = P_0 \cdot Cov(r_1, r_M)$
Gleichgewichtsrendite	f)	$E(r_j) = r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_j$
Risikoprämie des j-ten Titels	g)	$RP_j = (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_j = (E(r_M) - r_f) \cdot \dfrac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma^2_{r_j}} = (E(r_M) - r_f) \cdot \dfrac{\rho_{r_j, r_M} \cdot \sigma_{r_j}}{\sigma_{r_M}} = E(r_j) - r_f$
Risikoprämie des Kapitalmarktes	h)	$RP_M = E(r_M) - r_f$

5 Kapitalstruktur

Kapitalstruktur - Notation

V_U	...	Unternehmenswert rein Eigenfinanziert
V_L	...	Unternehmenswert teilweise Fremdfinanziert
$BW(...)$	...	Barwert
s	...	Ertragssteuersatz
D	...	Marktwert Fremdkapital
E	...	Marktwert Eigenkapital
v_0	...	Fremdkapitalquote
$v_{D\setminus E}$	...	Verschuldungsgrad
k_G	...	Gewichteter Durchschnitt der Kapitalkosten (auch WACC genannt)
k_E	...	Eigenkapitalkostensatz bzw. erwartete Rendite der Eigenkapitalgeber
k_F	...	Fremdkapitalkostensatz
k_G^N	...	Gewichteter Durchschnitt der Kapitalkosten nach Steuern

Modigliani & Miller Irrelevanztheorem

$$v_0 = \frac{D}{D+E} \qquad k_G = v \cdot k_F + (1-v) \cdot k_E$$

$$v_{D\setminus E} = \frac{D}{E} \qquad k_E = k_G + v_{D\setminus E} \cdot (k_G - k_F)$$

Fremdkapital und Steuern

$$k_G^N = v \cdot k_F \cdot (1-s) + (1-v) \cdot k_E$$
$$V_L = V_U + BW(fremdfinanzierungsbedingter\ Steuervorteil)$$

Bei Fremdkapital mit unendlicher Laufzeit:

$$BW(fremdfinanzierungsbedingter\ Steuervorteil) = s \cdot D$$

Agency-Kosten

$$V_L = V_U - BW(Kosten\ der\ finanziellen\ Notlage)$$
$$\Rightarrow \quad BW(Kosten\ der\ finanziellen\ Notlage) = V_U - V_L$$